

Devoir Mathématiques N° 1 (1 h)

1 Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_n = \frac{2}{2n + 1}$$

2 Le but de cet exercice est de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$.

1. Soit g définie sur $x \in \mathbb{R}_+$ par $g(x) = \sin x - x$.

a) Étudiez g et dressez son tableau de variations.

b) En déduire le signe de g .

2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$.

a) Montrer que $f' = g$.

b) Dresser le tableau de variations de f .

c) En déduire l'inégalité à démontrer.

3 Résoudre dans $[0; 2\pi]$

$$4 \sin^2 x \geq 3$$

4 Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation

$$\frac{x}{x-1} \leq \frac{2}{x}$$

5 Résoudre dans $[0; 2\pi]$:

$$2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$