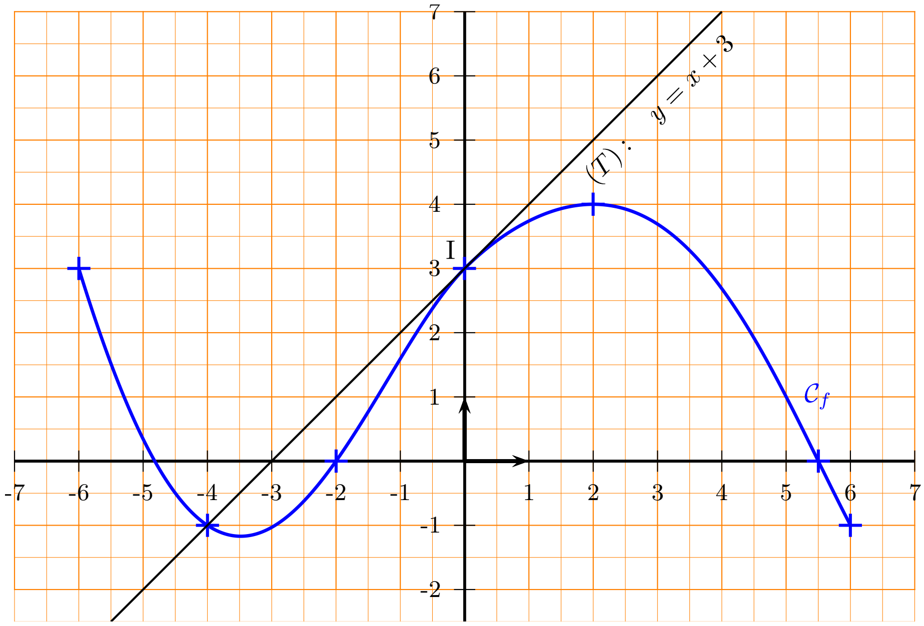
Devoir de Mathématiques N^o 14 - Intégrales

I **(6 points)** On donne ci-dessous, dans un repère orthogonal du plan $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, la courbe $(\mathcal{C}_f)$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-6\ ;\ 6]$.
La droite (T) d'équation $y = x + 3$ est tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point I de coordonnées $(0\ ;\ 3)$.



Cet exercice est un ***questionnaire à choix multiples****. Pour chacune des trois questions, trois réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient. Vous justifierez votre réponse.*
Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. Le nombre dérivé de f en 0 est :

   a. 0 **b.** 1 **c.** 3

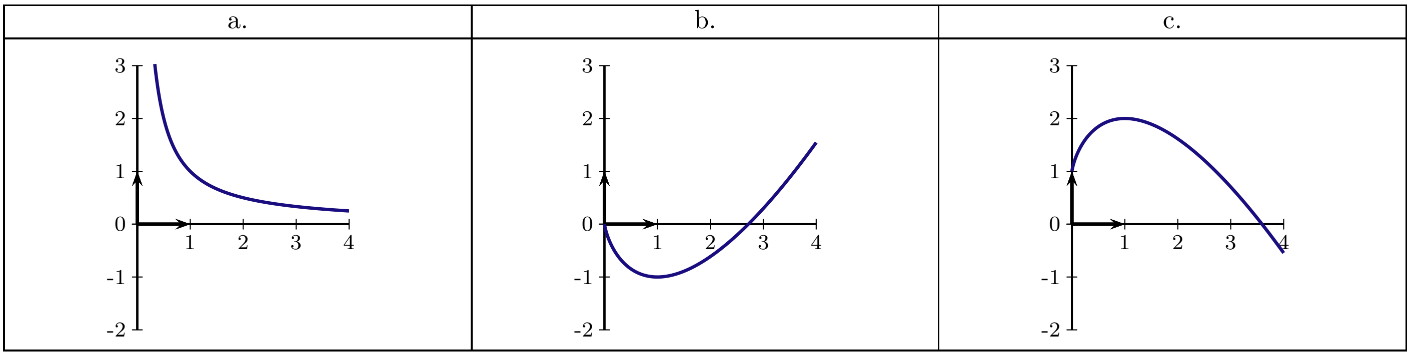
2. On pose $\text{J} = \displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\text{d}x$. On peut affirmer que :

   a. $-2 < \text{J} < 0$ **b.** $-4 < \text{J} < -2$ **c.** $2 < \text{J} < 4$

3. On appelle F une primitive de f sur l'intervalle $[-6\ ;\ 6]$.
   a) F est croissante sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$;
   b) F est décroissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 5]$;
   c) F est croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 5]$
4. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[-6\ ;\ 6]$ par : $g(x) = \exp\,[f(x)] = \text{e}^{f(x)}$ On peut affirmer que :
   a) la fonction g a les mêmes variations que f sur l'intervalle $[-6\ ;\ 6]$.
   b) la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[-6\ ;\ 6]$
   c) la fonction g a les variations inverses de celles de f sur l'intervalle $[-6\ ;\ 6]$.
5. Quelle est la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(3x - x^2\right)\,\text{d}x$?

   a. 0 **b.** $\dfrac{7}{6}$ **c.** 2

6. La fonction g est définie sur l'intervalle $]0\ ;\ 4]$ par $g(x) = \ln x$. Parmi les trois courbes suivantes, laquelle représente une primitive de la fonction g ?



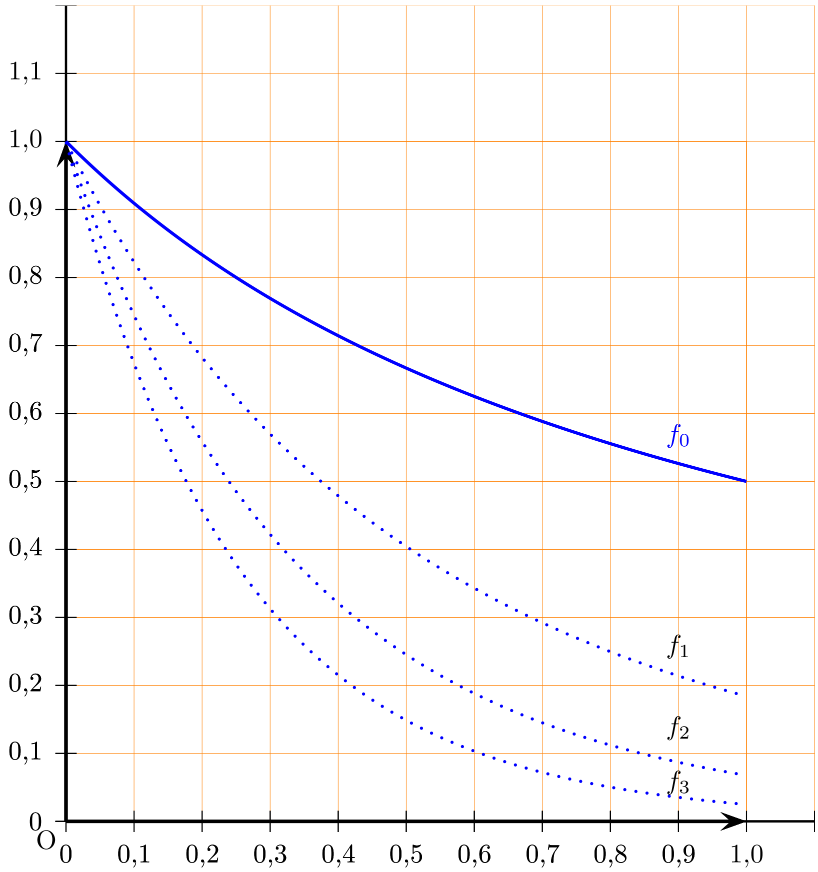
II **(14 points)** On considère les suites (I_n) et (J_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Sont représentées ci-dessous les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}$$

pour différentes valeurs de n :



a) Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en expliquant la démarche.

b) Démontrer cette conjecture.

2. a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$:

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x} \leqslant \mathrm{e}^{-nx}.$$

b) Montrer que les suites (I_n) et (J_n) sont convergentes et déterminer leur limite.

3. a) Montrer, que pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout $x \in [0;1]$:

$$f_n'(x) = -nf_n(x) - \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}$$

b) En déduire

$$I_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-n}}{2} - J_n\right).$$

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

III **Bonus (1 point)** Soit φ définie par

$$\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt$$

On ne cherchera pas à expliciter une primitive de φ.

1. Déterminer le domaine de définition D de φ.
2. Déterniner les variations de φ.