Devoir n° 10 : Suite et Espace (1h30)

I **(6 points)**

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 4}.$$

1. La copie d'écran ci-contre présente les valeurs, calculées à l'aide d'un tableur, des termes de la suite (u_n) pour n variant de 0 à 12, ainsi que celles du quotient $\frac{4}{u_n}$, (avec, pour les valeurs de u_n, affichage de deux chiffres pour les parties décimales).
   À l'aide de ces valeurs, conjecturer l'expression de $\frac{4}{u_n}$ en fonction de n.
   Le but de cet exercice est de démontrer cette conjecture (question **5.**), et d'en déduire la limite de la suite (u_n) (question **6.**).

n	u_n	$\frac{4}{u_n}$
0	1,00	4
1	0,80	5
2	0,67	6
3	0,57	7
4	0,50	8
5	0,44	9
6	0,40	10
7	0,36	11
8	0,33	12
9	0,31	13
10	0,29	14
11	0,27	15
12	0,25	16

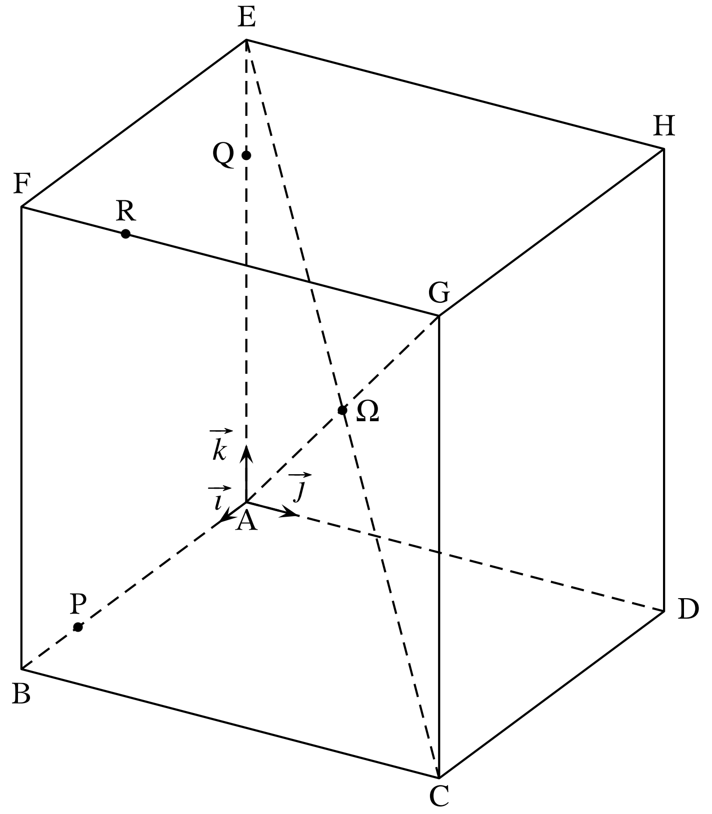
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. Que peut-on conclure des questions **2.** et **3.** concernant la suite (u_n) ?
5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{4}{u_n}$.
   Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.
   Préciser sa raison et son premier terme.
   En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.
6. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.
   En déduire la limite de la suite (u_n).

$\boxed{\text{II}}$ **(6 points)**

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 8 cm et de centre Ω.

Les points P, Q et R sont définis par $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(A~;\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$ avec : $\vec{\imath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}$.



Partie I

1. Dans ce repère, on admet que les coordonnées du point R sont $(8\,;\,2\,;\,8)$.
   Donner les coordonnées des points P et Q.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}(1~;~-5~;~1)$ est un vecteur normal au plan (PQR).
3. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (PQR) est $x - 5y + z - 6 = 0$.

Partie II

On note L le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (PQR).

1. Justifier que les coordonnées du point Ω sont $(4\,;\,4\,;\,4)$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite d perpendiculaire au plan (PQR) et passant par Ω.
3. Montrer que les coordonnées du point L sont $\left(\frac{14}{3}~;~\frac{2}{3}~;~\frac{14}{3}\right)$
4. Calculer la distance du point Ω au plan (PQR).