Devoir n° 11 Fonctions et probabilités (1h30)

(I) Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.
La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.
   On envisage les événements suivants :
   - H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
   - H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
   - H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
   - C : « l'arbre choisi est un conifère »,
   - F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

   a) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
   b) Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.
   c) Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à $0,525$.
   d) L'arbre choisi est un conifère.
   Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3}.
2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.
   On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.
   a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   b) Déterminez l'espérance de X et donnez une interprétation dans le contexte de l'exercice.
   c) Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ?
   On arrondira à 10^{-3}.
   d) Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ?
   On arrondira à 10^{-3}.
3. Soit n un entier, $n > 1$. On choisit au hasard un échantillon de n arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de n arbres dans le stok.
   On appelle Y_n la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.
   a) On note A_n l'événement « au moins un des n arbres choisis est un conifère ».
   Montrer que $P(A_n) = 1 - 0,475^n$
   b) Déterminez la valeur minimale de n pour que $P(A_n) \geq 0,9999$.
   c) Déterminer la taille n minimale de l'échantillon pour qu'en moyenne au moins 100 arbres sur les n choisis soient des conifères.

(II) *Les parties B et C sont indépendantes.*

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x-1} + 1.$$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A : étude de la fonction

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe C ?
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
   Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x-1}$.
4. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Partie B : recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe C au point d'abscisse a, qui passe par l'origine du repère.

1. Tracer une telle tangente sur le graphique et conjecturer la valeur de a ainsi qu'une équation de cette tangente.
2. On appelle T_a la tangente à C au point d'abscisse a. Donner une équation de T_a.
3. Démontrer qu'une tangente à C en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité

$$1 - a^2\mathrm{e}^{a-1} = 0.$$

4. En étudiant $\varphi(x) = 1 - x^2\mathrm{e}^{x-1}$, démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation

$$1 - x^2\mathrm{e}^{x-1} = 0.$$

5. Donner alors une équation de la tangente recherchée.

Partie C : convexité

1. Calculer $f''(x)$
2. Etudier la convexité de f et l'existence eventuelle de points d'inflexion.