Devoir de Mathématiques N^o 12 (2 heures)

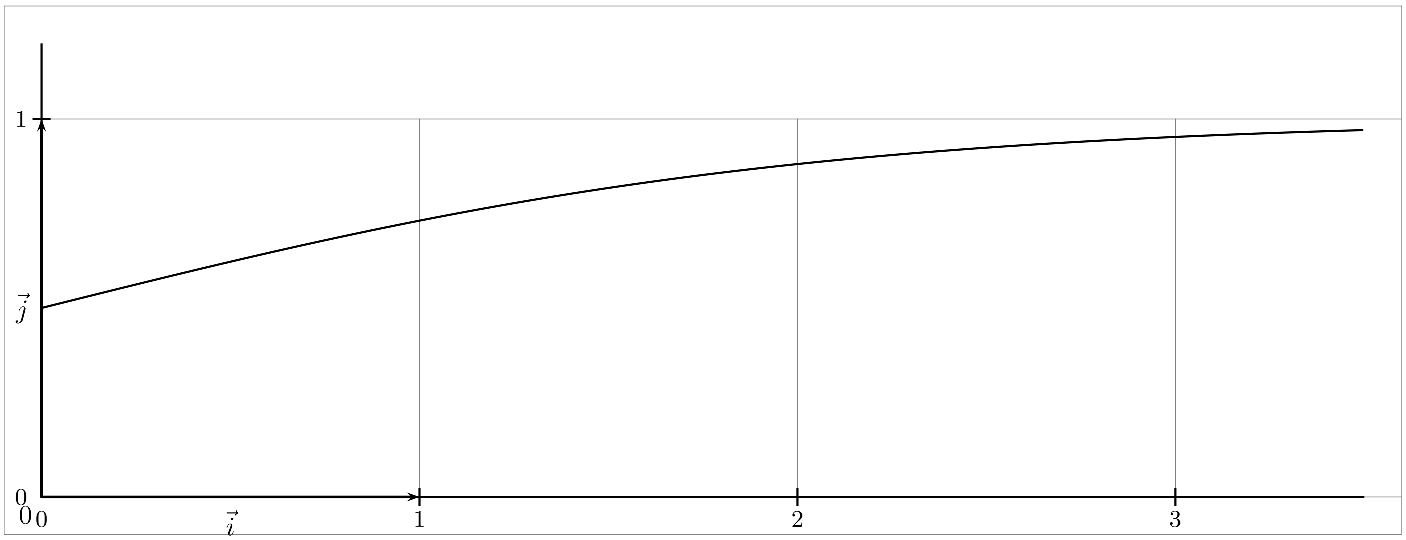
Exercice 1 : 3,5 points

On désigne par f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}_+$ des nombres réels par

$$f(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x}}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe representative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (unité graphique : 5 cm). Voir graphique ci-joint.

1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et donner une interprétation géométrique.
   (b) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
2. Soit n un entier naturel. On désigne par D_n le domaine du plan limité par la droite d'équation $y = 1$, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$, $\mathcal{A}_n$ désigne l'aire du domaine D_n exprimée en unité d'aire en cm^2.
   (a) Calculer $\mathcal{A}_n$.
   (b) Étudier la limite éventuelle de $\mathcal{A}_n$, lorsque n tend vers $+\infty$.



Exercice 2 : 6,5 points

Pour tout entier n, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$$

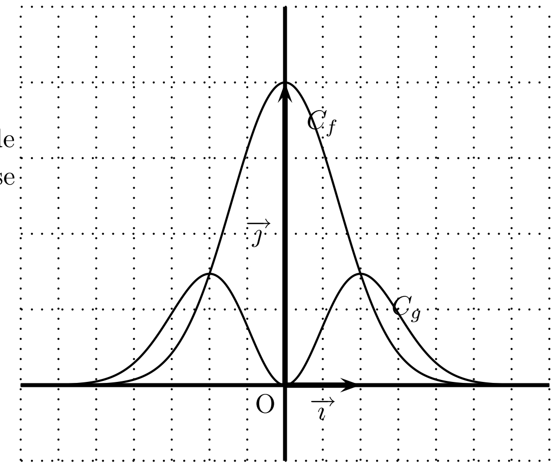
1. (a) Démontrer que pour tout x dans l'intervalle $[1; e]$ et pour tout entier naturel n, on a
$$(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} \geq 0$$
   (b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.
2. (a) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n$$
   (b) Calculer I_0. En déduire I_1 et I_2.
3. (a) Démontrer que pour tout n, $I_n \geq 0$
   (b) Démontrer que pour tout n, $(n+1)I_n \leq e$
   (c) En déduire la limite de I_n

Exercice 3 : 4,5 points

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2\mathrm{e}^{-x^2}.$$

On note respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, dont les tracés se trouvent ci-joint.



On admettra les résultats suivants :

- Les fonctions f et g sont dérivables.
- Sur $\mathbb{R}^+$, f est décroissante.
- g croissante sur $[0; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$.
- C_f et C_g s'intersectent au point A d'abscisse 1.
- La limite de f et g en $+\infty$ est 0.

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$G(x) = \int_0^x t^2\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Que représente G pour la fonction g ?
2. Donner, pour $x > 0$, une interprétation de $G(x)$ en termes d'aires.
3. Étudier le sens de variations de G sur $\mathbb{R}$.
   On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par : pour tout réel x, $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
4. Démontrer, que, pour tout réel x, $G(x) = \dfrac{1}{2}\left[F(x) - x\mathrm{e}^{-x^2}\right]$; (on pourra commencer par comparer les fonctions dérivées de G et de $x \longmapsto \dfrac{1}{2}\left[F(x) - x\mathrm{e}^{-x^2}\right]$.
   On admet que la fonction F admet une limite finie ℓ en $+\infty$, et que cette limite ℓ est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine $\mathcal{A}$ limité par la courbe $\mathcal{C}_f$ et les demi-droites $[\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath})$ *et* $[\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\jmath})$.
5. (a) Démontrer que la fonction G admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera.
   (b) Interpréter en termes d'aires le réel $\mathrm{N} = \displaystyle\int_0^1 \left(1 - t^2\right)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
   (c) **Question Bonus :** En admettant que la limite de G en $+\infty$ représente l'aire $\mathcal{P}$ en unités d'aire du domaine $\mathcal{D}$ limité par la demi-droite $[\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath})$ et la courbe $\mathcal{C}_g$ justifier graphiquement que :

   $$\int_0^1 \left(1 - t^2\right)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{\ell}{2}.$$

   (on pourra illustrer le raisonnement sur la figure fournie)

Exercice 4 : 5,5 points

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

1. (a) Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a $e^{-x} \leq e^x$.
   (b) Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et dresser le tableau de variations (complet) de f sur $[0; +\infty[$.
2. Pour n entier naturel, on considère

   $$I_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$$

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

   $$f(n+1) \leq I_n \leq f(n)$$

   (c) En déduire que (I_n) est décroissante.
   (d) Montrer que (I_n) converge.