Devoir de Mathématiques N^o 4 (2 heures)

Le sujet est recto-verso. Les exercices peuvent être traités dans le désordre.

Exercice 1 (6 points) :

Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle I indiqué.

1. $f(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 - 5x + 1}{x}$; sur $I =]0; +\infty[$.
2. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{(x^3 + 3x + 1)^2}$; sur $I =]0; +\infty[$.
3. $f(x) = \sin x \cos^4 x$; sur $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = \tan x$, $I =]\dfrac{\pi}{2}; \pi[$.
5. $f(x) = \cos^2 x$; sur $I = \mathbb{R}$.
6. $f(x) = \tan x + \tan^3 x$; sur $I =]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}[$.
7. (a) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in [1; +\infty[$ on ait

$$\frac{12 - 14x}{(1-2x)^2} = \frac{a}{1-2x} + \frac{b}{(1-2x)^2}$$

   (b) Déterminer alors la primitive de $f(x) = \dfrac{12 - 14x}{(1-2x)^2}$ sur $I = [1; +\infty[$.

Exercice 2 (2 points) :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11)$;
2. $\ln(x^2 + 5x + 6) = \ln(x+11)$.

Exercice 3 (2 points) :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\ln(\ln x) \leq 0$;
2. $\ln(x-1) + \ln(x+1) \leq \ln(x^2 - 1)$.

Exercice 4 (2 points) :

Aprés avoir préciser leur domaine de définition, déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \ln(\ln x)$;
2. $f_2(x) = \ln(\sqrt{3x^2 + 2})$.

Exercice 5 (4 points) :

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :

$$f(x) = 2x - 1 + \ln(\frac{x}{x+1}).$$

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. (a) Etudier la limite de f en 0 et donner une interprétation géométrique.
   (b) Etudier la limite de f en $+\infty$.
   (c) Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$. Etudier la position relative de Δ et $\mathscr{C}$.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Démontrer que $f(x) = 0$ admet une solution unique α et déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Exercice 6 (4 points) :

Soit f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2(\ln x - \frac{3}{2}) \quad \text{si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. On admet que $f'(0) = 0$. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}$?
2. Etudier la limite de f en $+\infty$.
3. (a) Justifier que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et déterminer la dérivée f' de f sur $]0; +\infty[$.
   (b) Etudier f et dresser le tableau de variation de f
   (c) Construire sommairement la courbe $\mathscr{C}$ dans $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (unité graphique 2 cm).